Классификация движений на плоскости

Пусть F – функция, аргументами и значениями которой являются точки плоскости. Запись $A' = F(A)$ означает, что F переводит точку A в точку A'. Функция F называется *движением* на плоскости, если для любых точек A и B расстояние AB равно расстоянию $A'B'$, где $A' = F(A)$ и $B' = F(B)$. Иначе говоря, движение сохраняет расстояния между точками.

Теорема. Пусть F – движение на плоскости. Тогда F принадлежит к одному из следующих типов преобразований:
I. Параллельный перенос.
II. Поворот вокруг точки на плоскости.
III. Осевая симметрия.
IV. Осевая симметрия с последующим параллельным переносом.

Таким образом, существует всего 4 вида движений. Точнее, их три: осевая симметрия является лишь частным случаем IV типа преобразований. Но для удобства будем всё же различать III и IV типы.

Для доказательства теоремы нам понадобятся несколько вспомогательных утверждений (лемм), приведённых ниже.

<u>Лемма 1.</u> Пусть F – движение на плоскости, A, B – точки плоскости. Тогда F переводит отрезок AB в равный ему отрезок $A'B'$, где $A' = F(A)$, $B' = F(B)$.

Доказательство. Равенство отрезков AB и $A'B'$ следует из определения движения. Пусть x – длина AB. Возьмём точку C на отрезке AB и обозначим $AC = y$, $CB = z$. Тогда F переводит C в точку C', для которой $A'C' = y$, $C'B' = z$. Так как $y + z = x$, и $A'B' = x$, такая точка C' единственна, и она находится на отрезке $A'B'$. Теперь нетрудно понять, что отрезок AB переводится движением F в отрезок $A'B'$.

<u>Лемма 2.</u> Всякое движение F переводит треугольник ABC в равный ему треугольник $A'B'C'$, где $A' = F(A)$, $B' = F(B)$, $C' = F(C)$.

Примечание. Здесь и далее в понятие треугольника ABC будем включать и «вырожденный» случай, когда C лежит на прямой AB.

<u>Лемма 3.</u> Если различные точки A и B симметричны относительно прямых m и n, то прямые m и n совпадают.

<u>Лемма 4.</u> Даны треугольник ABC и отрезок $A'B'$, равный AB. Существует не более двух точек C' таких, что треугольник $A'B'C'$ равен ABC. Если C не лежит на прямой AB, то таких точек две, и они симметричны относительно прямой $A'B'$; если C лежит на AB, то точка C' единственна: она находится на прямой $A'B'$.

<u>Лемма 5.</u> Пусть F – движение, состоящее из поворота на ненулевой угол с последующим переносом. Тогда F является поворотом вокруг одной из точек плоскости.

Доказательство. Предположим (без ограничения общности), что поворот, с которого начинается движение F, производится вокруг начала координат. Тогда F можно определить как функцию $F(p) = ap + b$, где p – точка комплексной плоскости, a, b – комплексные числа, причём $|a| = 1$, $a \neq 1$. Пусть $c = b / (1 - a)$. Тогда $F(p) = a(p - c) + c$, т.е. F является поворотом вокруг точки c комплексной плоскости на угол $\arg a$.

Теперь можно приступить к классификации движений. Для этого рассмотрим произвольное движение F, а также множество точек плоскости, фиксируемых F (т.е. множество точек X, для которых $F(X) = X$).

<u>Утверждение 1</u>. Если F фиксирует три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой, то F фиксирует каждую точку плоскости.

Доказательство. Пусть D – точка, отличная от A, B и C. Допустим, что F не фиксирует D, т.е. точка $D' = F(D)$ не совпадает с D. Движение F переводит треугольники ABD и ACD в равные им треугольники ABD' и ACD', соответственно. Согласно Лемме 4, если D' не совпадает с D, то точка D' симметрична точке D относительно прямых AB и AC. Из Леммы 3 следует, что в этом случае прямые AB и AC совпадают. Однако, A, B и C не лежат на одной прямой – противоречие. Следовательно, F фиксирует точку D.

<u>Утверждение 2.</u> Если F фиксирует различные точки A и B, лежащие на прямой l, то F фиксирует каждую точку прямой l. Если F при этом не фиксирует никакую точку плоскости, кроме точек прямой l, то F является осевой симметрией относительно l.

Доказательство. Пусть C – точка на прямой l. «Вырожденный» треугольник ABC переводится движением F в равный ему треугольник ABC', где $C' = F(C)$. По Лемме 4, точка C' единственна, следовательно $C' = C$, т.е. F фиксирует C. Таким образом, F фиксирует каждую точку на прямой l.

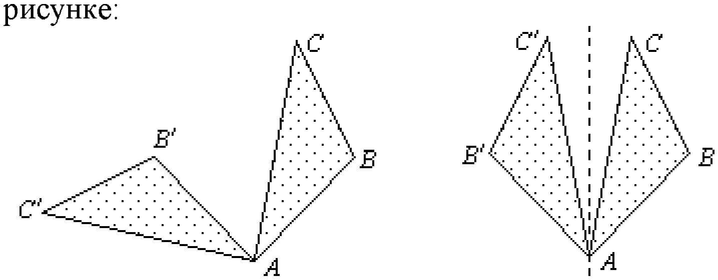
Теперь предположим, что F не фиксирует ни одну точку за пределами прямой l. Рассмотрим произвольную точку D, не принадлежащую l. Тогда $D \neq D' = F(D)$. Движение F переводит треугольник ABD в равный ему треугольник ABD', и поскольку $D' \neq D$, из Леммы 4 следует, что D' и D симметричны относительно прямой AB, т.е. прямой l.

Значит, точки на прямой l переводятся сами в себя, а точки за пределами l переводятся в точки, симметричные им относительно l. Поэтому F – осевая симметрия относительно l.

<u>Утверждение 3.</u> Если F фиксирует ровно одну точку плоскости, то F является поворотом вокруг этой точки.

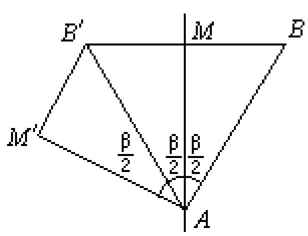
Доказательство. Пусть A – единственная точка, которую фиксирует F. Выберем произвольную точку B, отличную от A. Обозначим $B' = F(B)$, $\beta = \angle BAB'$. Докажем, что F – поворот относительно точки A на угол β.

Пусть C – точка плоскости, отличная от A и B. Треугольник ABC переводится движением F в равный ему треугольник $AB'C'$, где $C' = F(C)$. Используя Лемму 4 получаем, что если точка C лежит на прямой AB, то точка C' единственна: C' получается из C поворотом вокруг A на угол β (равенство треугольников ABC и $AB'C'$ легко проверить). Иначе для точки C' существуют две возможности, показанные на рисунке:



В первом случае C' получается из C поворотом вокруг A на угол β, во втором – симметрией относительно биссектрисы угла BAB'.

Второй случай приводит к противоречию. Чтобы в этом убедиться, обозначим угол CAC' за ϕ, и рассмотрим точку M – середину отрезка BB'. Пусть $M' = F(M)$. Тогда треугольники ABM и $AB'M'$ равны, и поэтому либо M' совпадает с M (треугольники ABM и $AB'M$ равны, потому что $AB = AB'$), либо M' симметрична M относительно AB'. Первый вариант невозможен, т.к. F не фиксирует никакую точку, кроме A. Во втором варианте M' получается из M поворотом на угол β (см. рисунок). Рассматривая аналогичным образом треугольники ACM и $AC'M'$, приходим к выводу, что M' получается из M поворотом на угол ϕ. Но $\beta \neq \phi$, т.к. A, B, C не лежат на одной прямой – противоречие.



Таким образом, C' получается из C поворотом вокруг A на угол β, что и требовалось доказать.

<u>Утверждение 4.</u> Допустим, что F не фиксирует ни одну точку плоскости. Тогда F является параллельным переносом или осевой симметрией с последующим параллельным переносом.

Доказательство. Пусть A – произвольная точка плоскости. Обозначим $B = F(A)$. Пусть F' – движение, состоящее из движения F с последующим параллельным переносом на вектор $\overrightarrow{BA}$. Тогда F' фиксирует A, т.е. F' фиксирует как минимум одну точку плоскости. Из Утверждений 1, 2 и 3 вытекают следующие возможности: F' фиксирует каждую точку плоскости, F' является осевой симметрией, или F' является поворотом (на ненулевой угол). Заметим также, что F – движение, получающееся последовательным выполнением движения F' и параллельного переноса на вектор $\overrightarrow{AB}$.

Если F' фиксирует каждую точку плоскости, то F – параллельный перенос на вектор $\overrightarrow{AB}$. Если F' – осевая симметрия, то F – осевая симметрия с последующим параллельным переносом на вектор $\overrightarrow{AB}$. Если F' – поворот на ненулевой угол, то по Лемме 5 движение F – тоже поворот, что исключено: F не фиксирует ни одну точку. Утверждение доказано.

Теорема следует из Утверждений 1–4. Напоследок докажем, что преобразование IV типа является так называемой *скользящей симметрией* – осевой симметрией относительно некоторой прямой l с последующим переносом на вектор, параллельный l.

Лемма 6. Пусть m и n – параллельные прямые; n получается из m параллельным переносом на вектор $\vec{h}$, перпендикулярный прямым m и n. Тогда осевая симметрия относительно n есть осевая симметрия относительно m с последующим параллельным переносом на вектор $2\vec{h}$.

Указание. Лемму 6 можно доказать с помощью Утверждения 2: достаточно показать, что прямая n является множеством точек, фиксируемых движением, состоящим из симметрии относительно m и последующего параллельного переноса на вектор $2\vec{h}$.

Утверждение 5. Пусть F – движение, состоящее из последовательного выполнения осевой симметрии относительно прямой m и параллельного переноса на вектор $\vec{b}$. Тогда F является скользящей симметрией относительно прямой, параллельной m.

Доказательство. Разложим вектор $\vec{b}$ как сумму векторов $\vec{h}$ и $\vec{v}$, где $\vec{h}$ перпендикулярен m, а $\vec{v}$ параллелен m (см. рисунок). Пусть n – прямая, получающаяся из m переносом на вектор $\frac{1}{2}\vec{h}$. Тогда F – скользящая симметрия, состоящая из осевой симметрии относительно n и параллельного переноса на вектор $\vec{v}$, который параллелен n. Чтобы убедиться в этом, обозначим за S_m осевую симметрию относительно m. Тогда $S_n(X) = S_m(X) + \vec{h}$ – осевая симметрия относительно n (Лемма 6). Поэтому $F(X) = S_m(X) + \vec{b} = S_n(X) + \vec{b} - \vec{h} = S_n(X) + \vec{v}$.